Georgiy Isaakovitch Kac

Leonid Vainerman

2004

J'ai connu Georgiy Isaakovitch Kac, qui était tout à la fois un homme et un mathématicien remarquables, seulement de 1968 à 1978. A ma grande tristesse, il est mort d'une crise cardiaque le 20 mai 1978, au meilleur de son talent et de sa vitalité. Sa famille et ses amis sauraient décrire sa personnalité bien mieux que moi. Par exemple, comme son ami B. I. Khatset l'a écrit, sa modestie et sa générosité lui avaient valu le surnom moqueur de Pierre Bezukhov[1]et, comme vous pourrez vous en rendre compte, ce surnom lui convenait aussi en tant que mathématicien. Après sa mort, j'ai pu observer le développement considérable de ses idées dans les différents centres de recherche où j'ai passé ma carrière. Ceci explique que je veuille partager ici non seulement des souvenirs personnels mais aussi des réflexions sur ses idées mathématiques, leur genèse, leur évolution et leur impact sur d'autres chercheurs, à partir d'événements dont j'ai été le témoin. Ceci n'est pas un article scientifique, et ne tend ni à l'exhaustivité ni à une rigueur absolue ; pour autant, certains passages en seront plus faciles à comprendre pour ceux qui ont quelques connaissances d'algèbre et d'analyse. Le nombre de publications qui ont suivi les idées et les travaux de G. Kac se comptent par centaines, ne serait-ce que jusqu'en 1992, voir [22]. Je ne ferai référence ici qu'à celles qui sont d'après moi les plus utiles pour les lecteurs intéressés par l'héritage mathématique de G. Kac. Ce texte est la traduction d'un texte original en russe écrit à l'occasion de son 80e anniversaire.

Les algèbres de Kac

J'ai commencé à assister au séminaire de G. Kac sur les anneaux d'opérateurs à l'automne 1968. J'ai des souvenirs diffus de ses exposés sur les travaux de Glimm, Dixmier et Douady, et aussi de Fell. C'était un orateur remarquable, qui savait exposer les résultats de manière claire et rigoureuse, tout en étant vivante et accessible. Je n'avais assisté à rien de tel auparavant, et, longtemps

[1]un personnage principal de "Guerre et paix" de Léon Tosltoï

après sa disparition, bien peu d'orateurs m'ont laissé une impression comparable.

Jusqu'à l'été 1969, nos relations se réduisaient à des salutations polies lorsqu'il nous arrivait de nous croiser. Nous sommes devenus plus proches après la fin de ma maîtrise à l'Université de Kiev, lorsque j'ai été recruté à l'Ecole Militaire d'Ingénieurs en Aviation de Kiev où G. Kac était professeur de mathématiques. Même si j'avais été reçu avec la plus haute mention, il m'était interdit, dans ces années où l'antisémitisme régnait en URSS, de postuler officiellement à un programme de doctorat. Pour la même raison, G. Kac n'avait pu être recruté ni à l'Université ni au sein de l'Académie des Sciences ; heureusement, Yuri M. Berezanski l'avait aidé à monter son séminaire à l'Institut de Mathématiques. Dans les années qui ont suivi, j'ai eu la chance de travailler sous sa direction. Il a non seulement guidé ma carrière scientifique, mais aussi orienté la trajectoire de ma vie. Je dois cependant mentionner que je faisais alors ma thèse sous la direction, forcément non officielle, de M.L. Gorbachuk, ce qui me donne l'occasion d'exprimer la reconnaissance que je lui dois, scientifiquement et humainement : prendre la responsabilité d'encadrer un juif dans ces années-là en URSS était quelque chose ! J'ai ainsi finalement soutenu une thèse de doctorat en 1975.

Pour commencer, G. Kac m'a demandé de lui exposer le livre de J.-P. Serre, « Algèbres de Lie et Groupes de Lie » et ensuite de choisir entre deux sujets. Le premier consistait à développer son travail avec Félix A. Berezin [3] alors sous presse, et qui est maintenant considéré comme l'un des travaux pionniers sur un domaine qu'on appelle aujourd'hui super-mathématiques pour plaisanter, et qui est dédié à l'étude de structures mathématiques (super-algèbres, dont celles de Lie, super-variétés, etc.) induites par certains groupes, dont la plus simple est celle du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La motivation de ces travaux venait de la mécanique quantique, dans laquelle deux types de particules, les bozons et les fermions, sont gouvernés par des lois statistiques totalement différentes. Kac et Berezin venaient tous deux de la physique théorique, ce qui contribue à expliquer qu'ils aient été pionniers dans ce domaine. En 1950, G. Kac avait passé son diplôme de candidat en sciences (l'équivalent d'un doctorat) en théorie de corrélation des électrons dans un gaz, sous la direction de N.N. Bogolyubov. J'ai perdu toute chance de devenir un super-mathématicien en choisissant l'autre sujet, les groupes d'anneau introduits par G. Kac vers 1960.

Voici les prémisses qui ont amené la naissance de cette théorie. Si G est un groupe commutatif localement compact, on appelle groupe dual de G, le groupe $\widehat{G}$ de ses caractères continus unitaires. Le principe de dualité de L.S. Pontryagin dit que G et $\widehat{G}$ sont isomorphes. Malheureusement, ce principe magnifique n'est plus vérifié lorsque G n'est plus commutatif, et ceci même s'il est fini : les caractères du groupe sont alors trop peu nombreux, et ne peuvent contenir toute l'information sur le groupe. Un moyen naturel de retrouver cette dualité serait de remplacer les caractères du groupe par ses représentations unitaires irréductibles (qui sont égales à ses caractères lorsqu'il est commutatif). Effectivement, T. Tannaka avait montré en 1938 qu'il est possible de retrouver un groupe compact à isomorphisme près à partir d'une famille complète de ses représentations, et M. G. Krein avait donné en 1949 une description axiomatique complète de ce genre d'objet dual (appelé algèbre de bloc) pour un groupe compact. Hélas, la structure mathématique de cet objet est différente de celle du groupe, ce qui rompt le principe de dualité. Ensuite, une théorie de dualité non symétrique avait été développée par W.F. Stinespring (1959) pour des groupes unimodulaires et par N. Tatsuuma (1965-66) pour des groupes localement compacts quelconques.

Le comité de rédaction de la collection de traductions de textes mathématiques « Matematika » avait demandé à G. Kac de traduire en russe ces papiers de Stinespring. Pendant cette traduction, il lui était venu l'idée brillante de construire un nouveau type d'objets (qu'il a appelés *groupes d'anneau*) qui contiendraient à la fois les groupes et leurs duaux, en y incluant une dualité symétrique agissant entre eux. Cette dualité nécessitait que la structure mathématique de l'objet original et de son dual soient identiques, comme dans le cas de la dualité de Potryagin.

Voyons brièvement en termes mathématiques ce que G. Kac a proposé. Soit A une algèbre commutative de fonctions définies sur un groupe unimodulaire G, supposées mesurables et essentiellement bornées par rapport à la mesure invariante de G. L'opération de multiplication du groupe induit un homomorphisme d'algèbres Γ, appelé *co-multiplication*, qui associe à chaque fonction $f(x)$ de A une fonction de deux variables $f(xy)$, autrement dit un élément du produit tensoriel de deux copies de A. L'opération d'inversion du groupe G peut être « encodée » sous la forme d'un anti-isomorphisme S (appelé *antipode*) qui envoie A sur elle-même. La mesure invariante du groupe peut aussi être encodée sous la forme d'une fonctionnelle linéaire m sur A, qui est l'intégrale par rapport à cette mesure ; cette fonctionnelle, également appelée *mesure invariante*, peut prendre des valeurs infinies pour certaines fonctions. Ainsi, la totalité de l'information sur le groupe G s'exprime dans le quadruplet (A, Γ, S, m), où A est une algèbre (précisément une algèbre de von Neumann), et Γ, S et m sont des applications vérifiant certaines propriétés. Un tel quadruplet est appelé groupe d'anneau, et les algèbres de fonctions sur les groupes sont les groupes d'anneau pour lesquels l'algèbre A est commutative. D'un point de vue purement algébrique, les groupes d'anneau ne sont rien d'autre que des algèbres de Hopf. Celles-ci étaient apparues plus tôt en topologie, mais G. Kac n'en savait rien et les a réinventées en introduisant ses groupes d'anneau. L'objet dual d'un groupe ordinaire peut aussi être décrit comme un groupe d'anneau avec co-multiplication co-commutative (c'est-à-dire stable pour la permutation de facteurs dans le produit tensoriel). Dans ce cas, l'algèbre A est engendrée par les opérateurs de translation $L(g)$ sur le groupe (où g est élément de G), ou de façon équivalente par les opérateurs de convolution $L(F)$ (où F est une fonction continue et intégrable définie sur le groupe). La co-multiplication envoie $L(g)$ sur le produit tensoriel de deux copies de $L(g)$, l'antipode S envoie $L(g)$ sur l'opérateur adjoint, et la valeur de la fonctionnelle m en l'opérateur $L(F)$ est égale à l'évaluation de la fonction F en l'unité de G. Enfin, la construction de G. Kac permet de construire le dual de tout groupe d'anneau donné, non nécessairement commutatif ni co-commutatif. Et en appliquant cette construction deux fois, l'objet obtenu est isomorphe à celui d'origine, comme dans la dualité de Pontryagin.

Ces résultats ont d'abord été annoncés en 1961 dans « Soviet Math. Dokl. » puis publiés complètement dans [11]. Cet article repose sur les techniques de la théorie des traces sur les algèbres de von Neumann de I. Segal (une trace est une fonctionnelle linéraire positive et centrées, autrement dit telle que $m(ab) = m(ba)$) ; G.K. avait aussi traduit l'article de I. Segal pour « Matematika ». En termes de groupes, cela revenait à la construction d'une théorie de dualité symétrique incluant les groupes unimodulaires arbitraires. La généralisation de cette théorie pour y inclure les groupes localement compacts quelconques était déjà formulée dans le mémoire d'habilitation de G. Kac (Université d'Etat de Moscou, 1963). C'est le problème ouvert qu'il m'a proposé d'étudier au début des années 1970.

J'ai réalisé assez vite ce que cette généralisation impliquait. Pour des groupes d'anneau, la fonctionnelle m devait être une trace, donc pour généraliser la théorie, il fallait arriver à maîtriser les fonctionnelles positives non nécessairement centrées pouvant prendre des valeurs infinies (appelées poids). Par ailleurs, dans sa théorie, G. Kac faisait un usage systématique des liens étroits entre les traces et ce qu'on appelle algèbres de Hilbert, et par conséquent, parallèlement à la généralisation de la théorie des traces, il fallait développer une généralisation adéquate de la théorie des algèbres de Hilbert. L'idée a plu à G. Kac, et nous avons commencé à y travailler activement. Lorsque les articles [16] et [20], qui résolvaient ces problèmes, sont parus peu après, nous n'avons pas eu de mal à les comprendre, puisque nous avions alors parcouru la moitié du chemin...

Ainsi, le but poursuivi devenait atteignable, mais nous devions nous presser, nous n'étions pas seuls dans la course. A ce moment-là, M. Takesaki avait déjà écrit un article sur la généralisation des groupes d'anneau, et ce faisant, avait maîtrisé l'ensemble des techniques nécessaires. Je me demande encore comment ce mathématicien de pointe ayant accumulé un nombre de résultats brillants sur le sujet n'a pas gagné la course. G. Kac pensait que J. Dixmier poursuivait le même objectif : « Leonid, nous devons faire vite, je suis sûr que Dixmier a mis quelqu'un sur ce problème ». Il s'avéra qu'il avait raison. Même dans cette situation tendue, son intégrité n'a pas faibli. Comme il considérait que j'avais suggéré les idées de base qui pouvaient conduire à la solution, il avait décidé de me donner l'opportunité d'y parvenir par moi-même, en tant que seul auteur, alors même qu'il avait formulé le problème et fait des efforts importants pour me préparer à le résoudre. Nous parlions souvent de sujets qui y étaient liés, car il aimait que je vienne le rejoindre à la fin de ses cours pour le raccompagner depuis le Square Uritski où se trouvait l'Ecole Militaire jusqu'à la rue Bolshaya Podvalnaya où il habitait (les noms des rues sont ceux de l'époque soviétique), et parfois, la discussion continuait même chez lui. Nous discutions aussi beaucoup dans des salles de cours, au tableau ou au bureau. Plus tard, son séminaire sur les anneaux d'opérateurs a déménagé à la Maison de Promotion des Sciences de l'Ingénieur et a continué après sa mort sous la direction de Y. L. Daletski.

Me laisser travailler seul était assez risqué, j'avais encore besoin de temps pour maîtriser les techniques nécessaires. La mort de mon père en août 1971 a rendu les choses encore plus compliquées. Voyant que je ne faisais guère de progrès, G. Kac a compris que nous risquions de perdre la course, et s'y est remis sérieusement. Il a très vite réussi à passer certains des obstacles qui m'avaient arrêté, et j'ai fait des progrès spectaculaires avec son aide. Nos efforts conjoints nous ont rapidement permis d'écrire une première version de la solution. G. Kac continuait à me voir comme à l'origine des idées de base de la solution et a suggéré que je commence par en publier une partie seul, et que nous ne co-publions la totalité des résultats qu'ensuite, ce que nous avons fait, la note [6] a été soumise avant les articles [7].

Nous allions auparavant devoir surmonter une rude épreuve, avec la parution d'un long papier [21] de Takesaki. Le papier était introuvable à Kiev, et sa recension dans «Referativnyi journal» (l'analogue soviétique des « Mathematical Reviews ») annonçait la construction d'une théorie de dualité complète généralisant la théorie de G. Kac des groupes d'anneau et couvrant le cas des groupes localement compacts quelconques. Vu la réputation de l'auteur et le titre du papier, il était à peu près certain que nous avions perdu la course. G. Kac est parti toutes affaires cessantes à Moscou, où il allait plusieurs fois par an pour lire les articles introuvables à Kiev, et discuter avec ses collègues moscovites M. A. Naimark, F. A. Berezin, A. A. Kirillov, A. I. Shtern, entre autres. J'étais désespéré. Quand G. Kac est revenu avec une photocopie du papier de Takesaki, il est devenu clair que le rapporteur s'était trompé et que les résultats n'avaient pas atteint le but qui était le nôtre, et celui de bien d'autres.

Nous avons donc complété et publié nos deux papiers. Les papiers de M. Enock et J.-M. Schwartz (qui travaillaient sous la supervision de J. Dixmier) contenant des résultats équivalents, bien qu'utilisant une technique assez différente, parurent presque en même temps. Comme Michel Enock me l'a raconté longtemps après, J. Dixmier les encourageait à se presser, en leur expliquant qu'en plus de Takesaki, il devait y avoir quelqu'un qui travaillait sur le même problème avec Kac à Kiev. A cette époque les collègues français nous envoyaient immédiatement leurs prépublications et publications, et ils ont continué par la suite, alors que nous ne pouvions absolument pas leur répondre, travaillant dans une école militaire obéissant à des règles de confidentialité strictes nous interdisant de communiquer avec des étrangers. Par exemple, nous avons été invités en 1995 à une conférence à Marseille, dédiée à l'objet même de nos recherches. D'avance, G.K. avait dit que nous n'irions pas, mais je me suis précipité pour montrer l'invitation au Premier Département de l'Ecole. J'ai eu de la chance de m'en sortir : les hommes du KGB m'ont expliqué que si je voulais rester employé de l'Ecole, il valait mieux qu'ils fassent comme s'ils n'avaient pas vu l'invitation.

Vu le rôle clairement fondamental de G. Kac dans notre découverte de ces nouveaux objets mathématiques, l'initiative de M. Enock et J.-P. Schwartz de les nommer *algèbres de Kac* a été excellente (certains lecteurs ont probablement entendu parler des algèbres de Kac-Moody, tirant leur nom de Victor Kac et de nature totalement différente). La première apparition de ce terme date de 1974, comme je l'ai appris de la bouche même de G. Kac ; ses yeux étaient très expressifs et, lorsqu'il m'a parlé du papier en question, j'ai pu voir à quel point cela lui faisait plaisir. Evidemment, toujours aussi modeste, il n'a jamais prononcé l'expression « algèbre de Kac » lui-même. Le livre [22] est entièrement dédié à la théorie des algèbres de Kac.

Bien entendu, les algèbres de Kac n'ont pas été inventées pour leur seule beauté mathématique mais avec l'idée de les utiliser pour résoudre des problèmes variés. G. Kac disait que les groupes d'anneau devaient être considérés comme les groupes ordinaires qu'ils généralisaient et que leurs applications pourraient en être plus larges et plus complètes, ce qui s'est avéré exact au fil du temps. Avant de les utiliser effectivement, encore fallait-il en comprendre la structure, les propriétés et les premiers exemples. Après tout, ce n'était pas des groupes et, si c'en était une généralisation, elle en était assez lointaine.

Au début des années 1960, G. Kac avait commencé à identifier et à étudier les classes particulières des groupes d'anneau discrets, compacts et leurs représentations. Il a ensuite continué ce travail en collaboration avec V.G. Palyutkin. Son mémoire d'habilitation contenait une longue liste de problèmes ouverts. Si certains d'entre eux ont été résolus depuis (dont celui dont il a été question plus haut), d'autres sont encore ouverts aujourd'hui. L'un de ceux-ci concerne l'existence d'une mesure invariante qui est explicite dans la définition des algèbres de Kac et n'est pas une conséquence des autres axiomes comme dans le cas des groupes ordinaires (son existence est facile à montrer). Ces axiomes sont justifiés par le théorème de Weil qui dit que l'existence d'une mesure invariante implique celle d'une topologie localement compacte sur le groupe. Combiné avec le théorème de Haar (qui en est la réciproque), l'existence de la mesure invariante est donc équivalente à celle d'une topologie localement compacte. Cependant, il serait plus naturel de définir les algèbres de Kac seulement en termes algébriques et topologiques et de démontrer l'existence d'une mesure invariante, en généralisant le théorème de Haar des groupes. Pour les classes particulières d'algèbres de Kac dont il a déjà été question, cela a été fait dans [15] et [19]. Les algèbres de Kac finies [15] sont des *-algèbres de Hopf semi-simples finies sur le corps des complexes. Au lieu de la mesure invariante, l'axiomatique contient une co-unité, c'est-à-dire un caractère connecté d'une façon spéciale avec la co-multiplication et l'antipode, et qui est l'analogue de l'unité dans un groupe ordinaire. L'existence et l'unicité d'une mesure invariante y font l'objet d'un théorème. Les morphismes, et par conséquent les sous-objets, facteurs-objets, etc., se définissent de façon naturelle. Cet article est écrit de manière très claire. Je me rappelle avoir été très impressionné en le lisant, et encore aujourd'hui je le suggère aux jeunes mathématiciens comme première lecture sur le sujet. Cette expérience s'est révélée particulièrement réussie avec Dmitri Nikshych en 1995-1996. Cet article a tellement suscité son intérêt qu'il travaille depuis à d'intéressantes généralisations des algèbres de Kac. L'axiomatique des algèbres de Kac compactes est présentée dans [19] de la même manière, et on y trouve le théorème d'existence d'une mesure invariante.

G. Kac a montré dans son mémoire d'habilitation et dans [13] que nombre de résultats classiques sur les groupes finis peuvent être étendus aux algèbres de Kac finies. En particulier, il a obtenu l'analogue du théorème de Lagrange qui dit que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. Plus tard, un énoncé plus fort a été établi par V. D. Nichols et M. B. Zoeller pour les algèbres de Hopf fini-dimensionnelles. Comme pour les groupes finis, la seule algèbre de Kac de dimension simple p est le groupe cyclique à p éléments. Ce résultat a été généralisé de manières diverses dans des travaux récents par des auteurs variés. G.K. a aussi démontré que pour toute représentation irréductible d'une algèbre de Kac finie, il existe une base dans laquelle les coefficients de la matrice de représentation sont des entiers algébriques.

Comme on l'a vu au début, les algèbres de Kac commutatives correspondent aux groupes ordinaires, et les algèbres de Kac co-commutatives correspondent aux objets duaux des groupes ordinaires. Les exemples d'algèbres de Kac qui n'appartiennent à aucune de ces deux classes, dits non-triviaux, sont donc particulièrement intéressants. De tels exemples ont été construits par G. Kac et V.G. Paljutkin dans [12], [14], [15]. J'essayerai plus loin d'expliquer ce qui les motive. Pour l'instant, je me contenterai de dire, comme l'a noté V.G. Drinfeld dans son article fondamental [10], qu'ils apparaissent historiquement comme les premiers exemples de ce qu'on appelle les groupes quantiques, dont les applications sont aussi nombreuses qu'importantes.

De la même façon que les groupes ordinaires sont intéressants avant tout comme groupes de transformations d'ensembles, les algèbres de Kac peuvent agir, mais sur des algèbres à la place d'ensembles. L'opinion de G. Kac, maintenant généralement acceptée, était que les algèbres sont les équivalents non commutatifs des ensembles, tout comme les groupes d'anneau sont les équivalents des groupes. Il a proposé une définition d'une action de groupe d'anneau sur une algèbre et la construction du produit croisé de tels objets. Enock et Schwartz ont ensuite dédié une série de travaux à ce type de constructions et à des résultats qui y sont liés.

Revenons à Kiev au milieu des années 1970. Lors des discussions sur le choix de nouveaux problèmes à traiter, G. Kac insistait fortement sur l'étude approfondie des groupes d'anneau finis et de leurs représentations à partir de résultats connus, en considérant les groupes finis comme des bases, dans la même veine que dans ses propres travaux. Une autre option était la recherche d'exemples non triviaux d'algèbres de Kac, mais cela s'est avéré être extrêmement compliqué et ce n'est que vingt ans après, dans un contexte totalement différent, à la fois matériel et mathématique, que j'ai compris comment les construire d'une manière systématique. A cette époque, les aspects analytiques de la théorie me semblaient plus proches que ses aspects algébriques, même si les possibilités dans cette direction semblaient limitées.

Petit à petit, la décision s'est formée dans mon esprit de généraliser les algèbres de Kac pour qu'elles recouvrent ce qu'on appelle les opérateurs de translation généralisée, ou hyper-groupes. Plus tôt, des généralisations des opérateurs de translation avaient été envisagées par des mathématiciens soviétiques de premier plan comme Y. M. Berezanski, S. G. Krein et B. M. Levitan. Cette direction de recherche offrait des challenges analytiques et l'on pouvait espérer en tirer des applications utiles et des exemples concrets. J'ai été désappointé de la réaction tiède de G. Kac, alors que ces problèmes étaient mentionnés dans son mémoire d'habilitation et dans son article [11]. Il disait que cela lui avait paru intéressant à un moment, mais qu'il avait ensuite réalisé que cette théorie présentait des défauts en termes algébriques. Effectivement, dans la théorie des algèbres de Kac la co-multiplication Γ envoie un produit d'éléments d'une algèbre A sur un produit, mais qui maintenant satisfait seulement une condition de positivité beaucoup plus faible, et certaines des propriétés essentielles des algèbres de Kac ne sont plus vérifiées dans cette généralisation. Malgré tout, le fait que, grâce à des contraintes plus faibles, cette théorie devenait plus riche en applications me semblait important. J'étais fasciné par cette idée, qui est devenue le sujet de mon mémoire d'habilitation soutenue en 1992. Dans les années 1980 et 1990, encouragé par Yu.M. Berezanski, j'écrivis une série d'articles sur ce sujet, dont certains en collaboration avec A. A. Kalyuzhnyi, Y. A. Chapovski et G. B. Podkolzin. Mais au milieu des années 1970, à ma grande tristesse, ma collaboration active avec G. Kac était presque terminée. Cependant, nous continuions à nous voir régulièrement et à discuter de sujets mathématiques et non mathématiques. Depuis, j'ai toujours gardé un oeil sur les algèbres de Kac, mon premier amour mathématique, mais ce n'est qu'au milieu des années 1990 que j'ai réellement repris leur étude.

Groupes quantiques

Il est temps de se tourner vers les événements associés à l'évolution des idées de G. Kac après sa mort. De mon expérience née de mes travaux sur les algèbres de Kac, il ressortait qu'une fois résolus les problèmes nés de leur création, leur champ d'applications n'était pas assez étendu, d'où la nécessité de d'entreprendre leur généralisation. Mais l'événement décisif dans cette direction a été au milieu des années 1980 la découverte par V.G. Drinfeld et quelques autres mathématiciens du monde des groupes quantiques [10]. En termes purement algébriques, la seule différence entre un groupe quantique et une algèbre de Kac est que le carré d'une antipode n'est pas nécessairement l'identité, ce qui semble anecdotique, mais suffit à faire toute la différence ; sans compter que l'algèbre en question n'est pas nécessairement semi-simple, et que le corps de base peut ne pas être le corps des complexes. Beaucoup d'exemples spécifiques et d'applications en découlent, en particulier en topologie et en physique théorique. Matériellement, c'est l'analyse approfondie des modèles mathématiques de la théorie de la diffusion quantique par des chercheurs de l'équipe de L.D. Faddeev à Saint Petersbourg qui ont amené à l'invention des groupes quantiques. Comme Alain Connes l'a écrit dans la préface du livre [22], les algèbres de Kac se sont révélées insuffisamment non unimodulaires pour couvrir de nouvelles applications d'où la nécessité de recourir aux groupes quantiques. On peut cependant remarquer que les algèbres de Kac sont à leur manière une généralisation non unimodulaires des groupes d'anneau !

En plus de leur implication dans des travaux purement algébriques (dans lesquels par exemple des déformations de pratiquement tous les groupes de Lie classiques ont été construites), un certain nombre de groupes quantiques ont vu le jour dans lesquels la topologie a aussi joué un rôle important. Notamment, S. L. Woronowicz a bâti dans [9] une théorie des groupes quantiques compacts qui commence par le théorème d'existence d'une mesure invariante et continue avec une étude systématique des représentations irréductibles et de leurs éléments matriciels. Comme vous vous rappelez peut-être, ce théorème de Haar avait été démontré dans la théorie des algèbres de Kac par V. G. Paljutkin. S. L. Woronowicz a aussi construit un certain nombre d'exemples de groupes quantiques, à la fois les algèbres de fonctions continues et leurs objets duaux. Pour cela, il avait dû surmonter de nombreuses difficultés analytiques fonctionnelles, spécifiques à chaque cas. Son travail a mis en évidence le challenge que constitue la généralisation de la théorie des algèbres de Kac de manière à couvrir tous les exemples intéressants tout en conservant ses traits les plus essentiels, comme sa beauté et sa symétrie.

Une étape importante dans la construction de cette nouvelle théorie a été réalisée par S. Baaj et G. Skandalis [1]. C'est l'article de Stinespring cité plus haut qui a mis en lumière le rôle essentiel joué dans la théorie de dualité des groupes unimodulaires par l'opérateur W unitaire qui envoie une fonction de deux variables $f(x, y)$ sur $f(x, xy)$. G.K. avait construit l'analogue de cet opérateur pour un groupe d'anneau arbitraire et montré la propriété fondamentale $W_{2,3}W_{1,3}W_{1,2} = W_{1,2}W_{2,3}$, appelée relation du pentagone. Il a été le premier à écrire cette relation et à voir son rôle clé dans la théorie de dualité. Plus tard, lui et moi d'une part, et Enock et Schwartz d'autre part, avons fait un plein usage de cette propriété dans la construction des algèbres de Kac non unimodulaires. Mais Baaj et Skandalis sont allés encore plus loin, en montrant que tout opérateur vérifiant cette relation du pentagone suffisait, sous certaines conditions de régularité, à construire deux algèbres d'opérateurs en dualité, chacune ayant une structure plus générale que celle d'une algèbre de Kac. Ils ont appelé cet objet un *opérateur unitaire multiplicatif*.

Après la fin de l'ère soviétique, notre vie a pris un nouveau tour. Un de mes amis, Dmitri Gurevich, a pu aller en France ; il a passé mes salutations et plusieurs publications à Michel Enock qui, apparemment estomaqué par le fait que j'existais réellement, m'a envoyé en retour plusieurs kilos de ses travaux. Il ne pouvait pas savoir que j'avais reçu tout ce qu'il m'avait envoyé avant, même si aucune réponse ne pouvait revenir de l'autre coté du rideau de fer (les enveloppes portaient souvent des traces montrant qu'elles avaient été ouvertes puis refermées, sûrement par le KGB, mais qui en son sein aurait pu s'intéresser à des articles de maths ?). Nous avons commencé à correspondre, et il est rapidement venu à Kiev. C'est alors, au printemps 1991, qu'il m'a montré la prépublication de l'article [1]. L'un des moments émouvants de son séjour a été la visite à la tombe de G. Kac au cimetière Gostomelskoye.

Au printemps de 1992, cela a été à mon tour de venir à Paris à l'invitation de Michel. Au milieu de toutes les impressions considérables dont cela a été l'occasion pour moi, l'une d'elles reste particulièrement vivante dans ma mémoire: Adrian Ocneanu a dit au début de son exposé qu'il était sincèrement heureux de pouvoir accueillir un représentant de l'école de G. Kac. Il ne savait pas que G. Kac n'avait jamais pu avoir de doctorants officiels, et que donc cette école consistait en tout et pour tout, pour ce que j'en sais, en deux étudiants et demi. V.G. Paljutkin, moi-même et V. Zhuk (ce dernier a travaillé avec G. Kac au milieu des années 1970 mais sa recherche n'a pas porté tous les fruits qu'on pouvait en attendre). Paljutkin et Zhuk étaient officiellement sous la direction de Y. M. Berezanski. En fait, en recevant de nombreux témoignages d'estime à Paris, j'étais pleinement conscient qu'ils étaient adressés à G. Kac plutôt qu'à moi. Comme il était injuste qu'il n'ait pas pu profiter de la moindre part de cette reconnaissance qu'il avait tellement méritée ! En plus des difficultés de sa vie, je tiens à souligner que ses résultats scientifiques, très en avance sur son temps, n'avaient pas été appréciés à leur juste valeur par certains mathématiciens prééminents de l'époque soviétique. Je citerai par exemple L. S. Pontryagin, dont le principe de dualité avait été si brillamment étendu par G. Kac, et aussi I. M. Gel'fand, qui avait été très critique envers ses travaux. A l'été 1983 Gel'fand me blâmait, essayant de me persuader de changer de sujet, « ne gâche pas ton talent comme ton professeur Kac a fait ! ». Ceci avait eu lieu juste avant la découverte des groupes quantiques, pour lesquels V. G. Drinfeld a reçu la médaille Fields (l'analogue du prix Nobel pour les mathématiciens), et qui avaient pour ancêtre direct les algèbres de Kac, voir [10]...

L'idée a graduellement émergé dans mon esprit de retourner à la construction d'exemples non-triviaux d'algèbres de Kac et de groupes quantiques. Bien que Woronowicz et d'autres aient déjà construit des exemples concrets de groupes quantiques, à chaque fois c'était un travail pénible qui impliquait de venir à bout de difficultés analytiques majeures. D'après moi, il était nécessaire d'obtenir une construction qui permette de trouver de nombreux exemples à partir d'une technique unifiée. Par exemple, Drinfeld proposait une manière purement algébrique de changer la co-multiplication Γ et l'antipode S sans changer l'algèbre A d'un groupe quantique donné pour en obtenir un nouveau. En appliquant cette construction, appelée twisting, à l'objet dual d'un groupe ordinaire, on pouvait espérer arriver à des exemples intéressants de groupes quantiques. J'ai alors commencé a étudier comment développer les aspects analytiques du twisting.

M. Enock est revenu à Kiev en mai 1994 pour le soixante-dixième anniversaire de G.Kac. Avec l'appui de M.L. Gorbachuk, alors président de la Société Mathématique de Kiev, lui et moi avons donné des exposés aux journées de la société sur les différentes facettes des activités de G.K.. Parmi les sujets abordés, figurait le problème des exemples d 'algèbres de Kac. A l'automne, m'étant familiarisé avec les résultats de M. Rieffel et M. Landstad, j'ai commencé à voir comment le twisting de Drinfeld pouvait s'adapter à notre but, et Enock et moi avons fini au printemps 1995 à Paris l'article [23]. Plus tard, j'ai étendu et renforcé ces résultats dans [8]. Les aspects fini-dimensionnels de cette construction ont été le sujet de discussions intenses à Kiev avec D. Nikshych, qui a écrit un papier intéressant à la suite. Ces activités ont eu pour résultat, en plus d'une méthode de construction abstraite, une famille entière de "quantisations" du groupe de Heisenberg bien connu des physiciens. Elles se sont toutes révélées être plus que des algèbres de Kac, en fait des groupes d'anneau unimodulaires dans le sens de la toute première définition de G. Kac. Qui plus est, nous avons obtenu la quantisation de familles classiques de groupes finis, symétriques, dihédraux, quasi-quaternions, et quelques autres. Les algèbres de Kac obtenues par D. Nikshych à partir des groupes alternés présentaient un intérêt particulier. Il est bien connu que ces groupes sont simples (à partir du cinquième de la série) ; les algèbres de Kac correspondantes se sont aussi avérées être simples en un sens très naturel, ce qui a apporté une réponse positive à la question de Victor Kac sur l'existence de tels objets.

A la fin des années 1990, un certain nombre d'événements se sont produits qui ont amené des progrès dans la généralisation tant attendue de la théorie des algèbres de Kac. Baaj et Skandalis d'une part, et Woronowicz d'autre part, ont affiné la compréhension des conditions de régularité à imposer à l'unitaire multiplicatif pour qu'il engendre une paire de groupes quantiques possédant des propriétés raisonnables. Une version de la théorie de tels groupes quantiques fut annoncée par T. Masuda, I. Nakagami et S.L. Woronowicz. Pendant ce temps, à Leuven en Belgique, A. Van Daele avait monté un groupe de travail petit mais actif pour discuter de nouveaux exemples de groupes quantiques et s'approchait de la construction d'une théorie générale. En particulier, pour la classe distinguée par Van Daele, les axiomes étaient formulés d'une manière purement algébrique et les propriétés topologiques en découlaient. Il était pertinent d'étudier les traits saillants d'une théorie générale à venir sur ce « matériau de laboratoire ». Par ailleurs, J. Kustermans explorait en détail les propriétés des poids (les fonctionnelles positives pouvant prendre des valeurs infinies) sur des C*-algèbres. Les poids avaient déjà été utilisés dans les années 1970 dans la construction de la théorie des algèbres de Kac non-unimodulaires, mais une étude plus poussée en était nécessaire, puisqu'une non-unimodularité plus forte était impliquée (je donnerai des détails plus loin).

Finalement, une théorie générale des groupes quantiques localement compacts a été proposée en 1999 par J. Kustermans et S. Vaes, élèves de Van Daele, dans [17]. Elle est aussi belle et symétrique que la théorie des algèbres de Kac, et, sans exagérer, on peut dire qu'elle a été modelée dessus. Plus précisément, un groupe quantique localement compact, dans la version algébrique de von Neumann, est un quadruplet $(A, \Gamma, m, n,)$, où l'algèbre A et la co-multiplication Γ sont les mêmes que dans la théorie des algèbres de Kac, et m et n sont respectivement les poids invariants à gauche et à droite sur A. Ces axiomes ne mentionnent pas l'antipode mais impliquent son existence et ses propriétés. Au lieu d'un poids, on en trouve deux, et voici la seconde non-unimodularité ! Cela ressemble à un groupe ordinaire non-unimodulaire localement compact qui aurait deux mesures invariantes, une à gauche et une à droite. Cette structure ressemble à celle des algèbres de Kac particulièrement pour ce qui touche à la dualité. Evidemment, techniquement, c'est beaucoup plus compliqué, mais en retour cela couvre virtuellement tous les exemples de groupes quantiques localement compacts.

A partir de septembre 1999, j'ai passé quelques mois à Leuven, où j'ai pu me familiariser avec ces concepts à leur source même, ce qui m'a permis d'envisager de mener à bien une idée tirant son origine de la magnifique théorie des extensions des algèbres de Kac finies. Comme je l'ai écrit plus haut, une algèbre de Kac commutative K_1 est une algèbre de fonctions sur un groupe ordinaire G_1, et une algèbre de Kac co-commutative K_2 est le dual d'un groupe ordinaire G_2. Etant donnés deux de ces groupes, G_1 et G_2, et donc deux de ces algèbres K_1 et K_2 , la question est de savoir s'il est possible de construire une nouvelle algèbre de Kac K telle que K_1, K et K_2 constituent une suite exacte. Pour cela, K_1 doit être une sous-algèbre normale de K, et K_2 l'algèbre factorielle correspondante (K est appelée extension de K_1 par K_2). G.K. avait donné dans [12] une réponse exhaustive à cette question dans le cas des groupes finis : pour qu'une telle extension existe il est nécessaire et suffisant que les groupes G_1 et G_2 agissent l'un sur l'autre comme sur des ensembles et que ces actions soient compatibles dans un sens convenable. Il avait entièrement décrit la construction de telles extensions, qui sont maintenant appelées produits doublement croisés. C'était exactement l'idée sous-jacente aux premiers exemples d'algèbres de Kac non triviales dans [12], [14], [15], même si l'exemple développé dans [14], où G_1 et G_2 sont des groupes de Lie, n'est pas inclus dans cette théorie générale des extensions.

Plus tard, cette construction a été redécouverte par plusieurs auteurs dont M. Takeuchi et Sh. Majid. Celle de ce dernier incluait non seulement les groupes finis mais aussi les groupes topologiques (voir le livre [18] et les références auquel il renvoie). Quoi qu'il en soit, la nature mathématique des extensions des groupes localement compacts quelconques risquait de s'avérer compliquée. Par exemple, pour être sûr d'obtenir une algèbre de Kac comme extension, il était nécessaire d'imposer des conditions très strictes sur G_1 et G_2, ce qui est précisément ce que Sh. Majid avait fait. Mais maintenant que nous avions une catégorie beaucoup plus largee de groupes quantiques localement compacts à notre disposition, nous pouvions espérer obtenir beaucoup plus de cette construction. Je partageais ces idées avec Stefaan Vaes, et en quelques mois nous avons transformé nos plans en réalité, l'article [4] tient toutes ses promesses !

Cet article ne contient que peu d'exemples concrets d'algèbres de Kac et de groupes quantiques, mais l'article suivant [5] parle de groupes de Lie G_1 and G_2 de petite dimension variés, ce qui amène à de nombreux exemples que nous avons classifié selon leurs propriétés. En particulier, nous y donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'extension soit une algèbre de Kac. Un exemple fondamentalement différent des groupes quantiques et ayant des propriétés de régularité étonnantes, dans lequel G_1 et G_2 proviennent de la théorie de nombres, a été construit plus tard par Baaj, Skandalis et Vaes. Ils ont aussi introduit dans l'extension des groupes quantiques localement compacts une autre idée brillante que G. Kac avait développée dans [12]. Précisément, pour décrire les extensions non-équivalentes des groupes quantiques, G. Kac avait construit une théorie de cohomologie intéressante, qui incluait une suite que l'on appelle suite de Kac exacte. Evidemment, cette terminologie n'a été introduite que plus tard, quand l'importance de cette suite est devenue évidente dans de nombreux problèmes. Récemment, la suite de Kac exacte a gagné en popularité parmi les spécialistes des groupes quantiques et aussi parmi les algébristes purs tels que A. Masuoka, P. Schauenburg, etc.

Je vais conclure ces notes par un point sur les algèbres de Kac "en action". Comme je l'ai souligné plus haut, elles peuvent agir sur les algèbres non-commutatives comme les groupes agissent sur les ensembles. A. Ocneanu a expliqué dans la postface du livre [22] qu'elles devraient apparaître comme les analogues non-commutatifs des groupes de symétrie dans la théorie des sous-facteurs (l'inventeur de cette théorie, V. Jones a reçu la médaille Fields). Effectivement, en 1994, W. Szymanski et R. Longo, indépendamment l'un de l'autre, ont démontré que si N est ce qu'on appelle un sous-facteur de profondeur 2 et d'indice fini de facteur M, et si leur commutant relatif (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de M qui commutent avec N) est trivial, alors il existe nécessairement une algèbre de Kac K agissant sur M et telle que N est la sous-algèbre de points fixes pour cette action. Une démonstration indépendante en a été donnée plus tard par M.-C. David. La construction de cette algèbre de Kac et de son action sont explicites. La réciproque est aussi vraie : étant donnée une algèbre de Kac et son action sur un facteur, on peut construire un sous-facteur correspondant ayant les propriétés ci-dessus. Cette situation ressemble à celle de la théorie de Galois classique, où M et N sont des corps et K un groupe de Galois. On peut d'ailleurs montrer que cette analogie va encore plus loin.

Ce résultat impressionnant a engendré une avalanche de travaux. Parmi les plus importants on peut citer ceux de M. Enock et R. Nest, qui ont obtenu des résultats similaires pour les sous-facteurs d'indice infini. Naturellement, dans ce cas, l'algèbre de Kac doit être remplacée par un groupe quantique localement compact. Une autre généralisation importante s'obtient en levant la condition de trivialité du commutant relatif. Dans ce cas, l'algèbre de Kac doit être remplacée par ce qu'on appelle un groupoïde quantique, une structure mathématique inventée par les physiciens théoriques. Sa principale différence avec les algèbres de Kac réside dans le fait que la co-multiplication Γ n'y est pas nécessairement une application unitaire ; un groupoïde quantique généralise un groupoïde ordinaire de la même façon qu'une algèbre de Kac généralise un groupe ordinaire. De nombreux travaux existent, dont ceux de D. Nikshych et de moi-même, qui étendent différents résultats de la théorie des algèbres de Kac aux groupoïdes quantiques. Des références et des notes historiques sur les groupes et groupoïdes quantiques peuvent être trouvées dans l'introduction de l'éditeur du livre cité dans [5].

Postface

Ces notes ont été écrites de janvier à mars 2004 à Caen, en France, bien loin en espace et en temps du Kiev du début des années 1970 et de mes premiers pas en Mathématiques sous la direction de Georgiy Isaakovich ; il est par conséquent peu surprenant que mes souvenirs soient teintés de nostalgie. Mais d'abord et avant tout, je voulais montrer l'influence puissante des travaux de G. Kac, finalement peu nombreux, sur les progrès d'un domaine large des mathématiques. Cela fait plus de 26 ans qu'il nous a quittés, mais il est facile de voir dans bien des travaux publiés récemment qu'ils tirent leur origine de ses idées. En effet, comme Pouchkine l'a si bien dit, « J'érige un monument superbe et immatériel, qui ne verra pas tarir le flot des pèlerins ».

Remerciements

Je suis profondement reconnaissant à mes traductrices.

Ce texte, écrit en russe, a été traduit en anglais par Nataliya Markova et publié sous le titre "Ideas that will outlast us", *European Mathematical Society Newsletter*, **92**, n.6 (2014), 16 - 22.

La version française est due à Valérie Girardin, reprise par Marie-Claude David.

Bibliographie

1. S. Baaj, G. Skandalis, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algebres.
Ann. Sci. Ecole Normale Sup., Ser. 4, 26(1993), 425-488.
2. Yu.M. Berezanski, F.A. Berezin, N.N. Bogolyubov, L.I. Vainerman, Yu.L. Daletski, A.A. Kirillov, V.G. Paljutkin, B.I. Khatset, and S.D. Eidelman, Georjiy Isaakovich Kac (Obitiary).
Soviet Math. Uspekhi 34, n.2 (1979).
3. F.A. Berezin and G.I. Kac, Lie groups with commuting and anticommuting parameters,
Math. USSR Sbornik 11 (1970), 311-325.
4. S. Vaes and L. Vainerman, Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction.
Advances in Mathematics, 175, n.1 (2003), 1-101.
5. S. Vaes and L. Vainerman, On low-dimensional locally compact quantum groups, in the book: Locally Compact Quantum Groups and Groupoids. Ed. L. Vainerman, IRMA Lecture Notes in Mathematics and Mathematical Physics, Walter de Gruyter, 2003, 127-187.
6. L.I. Vainerman, Characterization of objects dual to locally compact groups.
Funct. Anal. appl. 8, (1974), 66-67.
7. L.I. Vainerman and G.I. Kac, Nonunimodular ring groups and Hopf-von Neumann algebras.
Soviet Math. Dokl. 14(1974), 1144-1148; ?ath. USSR Sbornik 23(1974), 185-214.
8. L. Vainerman, 2-Cocycles and Twisting of Kac algebras.
Comm. Math. Phys., 191(1998), 697-721.
9. S.L. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups.

Comm. Math. Phys., 111(1987), 613-665.
10. V.G. Drinfel'd, Quantum groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, vol. 1, 1986, 798-820.
11. G.I. Kac, Ring groups and the principle of duality, I,II.
Trans. Moscow Math. Soc. 12(1963), 291-339; 13(1965), 94-126.
12. G.I. Kac, Extensions of groups to ring groups.
Math. USSR Sbornik 5(1968), 451-474.
13. G.I. Kac, Certain arithmetic properties of ring groups.
Funct. Anal. Appl. 6(1972), 158-160.
14. G.I. Kac and V.G. Paljutkin, Example of a ring group generated by Lie groups, Ukrainian Math. J., 16(1964), 99-105.
15. G.I. Kac and V.G. Paljutkin, Finite ring groups.
Trans. Moscow Math. Soc. 15(1966), 251-294.
16. F. Combes, Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche,
Compos. Math. 23(1971), 49-77.
17. J. Kustermans and S. Vaes, A simple definition for locally compact quantum groups.
Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I 328 (10) (1999), 871-876; Locally compact quantum groups, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., Ser. 4, 33(2000), 837-934.
18. S. Majid, Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge Univ. Press, 1995.
19. V.G. Paljutkin, Invariant measure of a compact ring group.
Am. Math. Soc. Transl. 84(1969), 89-102.
20. M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and their applications.
Lecture Notes in Math. 128(1970).
21. M. Takesaki, Duality and von Neumann algebras
Lecture Notes in Math. 24(1972), 665-785.
22. M. Enock and J.-M. Schwartz, Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups, Springer, 1992.
23. M. Enock, L. Vainerman, Deformation of a Kac algebra by an Abelian subgroup.
Comm. Math. Phys., 178(1996), 571-596.